Extension [1] de Germes de Difféomorphismes CR Pour Une Classe d'Hypersurfaces Analytiques Réelles Non Essentiellement Finies Dans $\mathbb{C}^3$

Joël MERKER [1] et Francine MEYLAN [2]

ABSTRACT. Let $H\colon M \longrightarrow M'$ be a germ of smooth CR diffeomorphism between M and M', two real analytic hypersurfaces at 0 in $\mathbb{C}^3$, with M' given by :

$$\mathrm{Im}\, w' \,=\, {z_1'}^{\mu}{\bar z_1'}^{\mu}\, \psi\big(z_1', \bar z_1', z_2', \bar z_2'\big), \qquad\qquad (z_1', z_2', w') \,\in\, \mathbb{C}^3,$$

where ψ is a real analytic function in a neighborhood of 0 in $\mathbb{C}^2$ satisfying $\psi(0) \neq 0$, $\psi_{{z_2'}^k}(0) \neq 0$ for some $k \geqslant 1$, $\psi_{{z_2'}^{\alpha}{\bar z_2'}^{\beta}} = 0$, for every choice of $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*$.

We prove that H is real analytic.

RÉSUMÉ. Soit $H\colon M \longrightarrow M'$ un germe de difféomorphisme CR lisse entre M et M', deux hypersurfaces analytiques réelles en 0 dans $\mathbb{C}^3$, avec M' donnée par :

$$\mathrm{Im}\, w' \,=\, {z_1'}^{\mu}{\bar z_1'}^{\mu}\, \psi\big(z_1', \bar z_1', z_2', \bar z_2'\big), \qquad\qquad (z_1', z_2', w') \,\in\, \mathbb{C}^3,$$

où ψ est une fonction analytique réelle dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$ satisfaisant $\psi(0) \neq 0$, $\psi_{{z_2'}^k}(0) \neq 0$ pour un $k \geqslant 1$, $\psi_{{z_2'}^{\alpha}{\bar z_2'}^{\beta}} = 0$, pour tout choix de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*$.

Nous démontrons que H est analytique réelle.

---

1. 1991 Mathematics Subject Classification : 32C16, 32F40. Keywords : CR mappings, real analytic hypersurfaces.

2. LATP CNRS, UMR 6632, CMI, Université de Provence, 39 rue Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France.

3. Université de Fribourg, lnstitut de Mathématiques, 1700 Pérolles, Fribourg, Suisse. Le second auteur bénéficie d'un subside du Fonds National Suisse no. 2000-042054.94/1.

1 INTRODUCTION

Dans un article célèbre, Baouendi, Jacobowitz et Treves [2] ont démontré que tout difféomorphisme CR de classe C^∞ entre deux hypersurfaces analytiques réelles essentiellement finies dans $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, est analytique réel. Il s'avère que la condition algébrique de finitude essentielle n'est pas la meilleure possible pour l'analyticité (cf. [1,6]) et qu'une condition plus géométrique et plus générale, appelée par Stanton [9] *non dégénérescence holomorphe*, doit constituer la condition recherchée. Pour $p_0 \in M$, on dit que M est *holomorphiquement dégénérée en* p_0 s'il existe un germe en p_0 de champ de vecteurs de type $(1,0)$ de la forme $L = \sum_{j=1}^n a_j(z)\partial/\partial z_j$, où les $a_j(z)$ sont des germes en p_0 de fonctions holomorphes, tel que $L|_M$ soit tangent à M. En effet, d'une part cette condition est nécessaire [1, Théorème 4] et d'autre part, Baouendi, Huang et Rothschild ont obtenu le résultat suivant: si $h: M \to M'$ est une application CR de classe C^∞ entre deux hypersurfaces *algébriques* connexes lisses dont le jacobien ne s'annule pas identiquement sur M, alors h se proplonge holomorphiquement dans un voisinage de M dans $\mathbb{C}^n$ si M n'est pas holomorphiquement dégénérée. Malheureusement, la méthode utilisée *ne s'applique qu'au cas algébrique*. Le cas analytique requiert une analyse supplémentaire, qui jusqu à présent n'a été menée à bien que pour les hypersurfaces analytiques de $\mathbb{C}^2$ non Levi-plates [5]. Dans cet article, nous traitons le problème dans $\mathbb{C}^3$.

Soit M une hypersurface analytique réelle dans $\mathbb{C}^n$ non holomorphiquement dégénérée et soit Σ l'ensemble des points non essentiellement finis de M. D'après [4], Σ est un sous-ensemble analytique réel de M. Pour $n = 3$, s'il est non trivial, sa dimension est comprise entre un et quatre. Le but de cet article est de mener à bien les calculs nécessaires pour démontrer l'analyticité dans le cas où Σ est régulier et de dimension trois, avec un exemple que voici.

Soit $H: M \to M'$, un difféomorphisme local CR de classe $\mathbb{C}^\infty$ entre deux hypersurfaces analytiques réelles en 0 de $\mathbb{C}^3$, avec M' donnée par

$$\operatorname{Im} w' = z_1'^{\mu} \bar{z}_1'^{\mu} \psi(z_1', \bar{z}_1', z_2', \bar{z}_2'), \quad (z_1', z_2', w') \in \mathbb{C}^3, \tag{0.1}$$

ψ étant une fonction analytique réelle dans un voisinage de 0 de $\mathbb{C}^2$, satisfaisant $\psi(0) \neq 0$, $\psi_{z_2'^k}(0) \neq 0$, pour un certain $k \geq 1$, $\psi_{z_2'^\alpha \bar{z}_2'^\beta} = 0$, pour tout choix $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*$.

THÉORÈME *Soit $H: M \to M'$ un difféomorphisme local CR de classe C^∞ avec $H(0)=0$. Alors H se prolonge holomorphiquement dans un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{C}^3$.

Pour démontrer le Théorème, on ne peut plus se contenter de tenir compte seulement de l'équation de M'. Cet article a pour but de montrer qu'il est nécessaire, pour le problème général, de tenir compte de la géométrie de M et de la forme explicite des champs CR sur M. La Section 3 est consacrée à obtenir l'expression (4.5) dans des coordonnées bien choisies. Par rapport aux méthodes traditionnelles, nous obtenons directement le prolongement holomorphe de la composante normale de H (Corollaire 4.14), avant d'étudier les équations polynomiales pour les deux autres composantes de H, qui sont obtenues dans la Section 5. Nous conjecturons que la composante normale d'une application CR locale de class C^∞ entre deux hypersurfaces analytiques réelles M et M' dans $\mathbb{C}^n$, avec M' donnée en coordonnées normales, se prolonge holomorphiquement, sans autre hypothèse.

2. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Soit M un germe d'hypersurface analytique réelle en 0. Après unchangement holomorphe local de coordonnées en 0, on peut supposer qu'il existe un voisinage ouvert de 0 suffisamment petit, Ω, tel que M ait pour équation dans Ω

$$\operatorname{Im} w = \varphi(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w), \quad z \in \mathbb{C}^2, \ w \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

φ étant analytique réelle et satisfaisant la condition $\varphi(z, 0, w) \equiv 0$. Un tel choix de coordonnées s'appelle *coordonnées normales*. On pose $w = s + \mathrm{i}t$. On écrit (f_1, f_2, g) l'expression de H via la paramétrisation de M et de M'. Soit L_j, $j = 1, 2$, les champs de vecteurs antiholomorphes tangents à M (via la paramétrisation), donnés par

$$L_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \mathrm{i} \frac{\varphi_{\bar{z}_j}}{1 + \mathrm{i}\varphi_s} \frac{\partial}{\partial s}, \quad j = 1, 2. \tag{2.2}$$

DÉFINITION 2.3 [9] *On dit qu'une hypersurface analytique réelle $M \subset \mathbb{C}^n$ est* holomorphiquement dégénérée *en $p_0 \in M$ s'il existe un germe non nul de champ de vecteurs $L = \sum_{j=1}^n a_j(z) \partial/\partial z_j$, avec a_j holomorphe dans un voisinage de p_0, tel que $L_{|M}$ est tangent à M.*

On rappelle le théorème suivant montrant le lien entre la notion de finitude essentielle [2] et la notion de dégénérescence holomorphe.

THÉORÈME 2.4 [6] *Soit M une hypersurface analytique réelle connexe dans $\mathbb{C}^n$. Alors on a les propriétés suivantes:*

(1) *Une condition nécessaire et suffisante pour que M soit holomorphiquement non dégénérée en un point $p_0 \in M$ est qu'il existe $p_1 \in M$, avec M essentiellement finie en p_1.*
(2) *M est holomorphiquement non dégénérée en p_0 si et seulement si M est holomorphiquement non dégénérée en tout point de M.*

On note Σ l'ensemble des points de M pour lesquels M n'est pas essentiellement finie. D'après [4], Σ est un sous-ensemble analytique réel de M. M est donc holomorphiquement non dégénérée ssi $\Sigma \neq M$.

3. PROPRIÉTÉS DE M ET DE H

Dans ce paragraphe, on suppose que $H: M \mapsto M'$ est un difféomorphisme local CR en 0, de classe C^∞, avec $H(0) = 0$. On suppose que M' est donnée par (0.1).

PROPOSITION 3.1 *Soit M' donnée dans les coordonnées (z'_1, z'_2, w') par (0.1). Alors*

$$\begin{aligned}\Sigma' &:= \{p' \in M'; M' \text{ n'est pas essentiellement finie en } p'\}\\ &= \{z'_1 = 0, t' = 0\}.\end{aligned}$$

Démonstration On écrit l'équation de M' sous la forme

$$\bar{w}' = w' - 2iz_1'^{\mu}\bar{z}_1'^{\mu}\left(\sum_{\beta_1,\beta_2\geq 0} \bar{z}_1'^{\beta_1}\bar{z}_2'^{\beta_2}\psi_{\beta_1\beta_2}(z'_1, z'_2)\right).$$

Pour $p' \in M'$, on note ses coordonnées $(z'_{1p'}, z'_{2p'}, w'_{p'})$. D'après les définitions introduites dans [2], p' est un point de finitude essentielle pour M' si et seulement si le germe d'ensemble analytique complexe

$$\begin{aligned}\Upsilon_{p'} :=\{&(z'_1, z'_2, w'_{p'});\ (z'_1, z'_2) \text{ proche de } (z'_{1p'}, z'_{2p'});\\ &z_1'^{\mu}\psi_{\beta_1\beta_2}(z'_1, z'_2) = z_{1p'}'^{\mu}\psi_{\beta_1\beta_2}(z'_{1p'}, z'_{2p'}),\ \forall\,(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2\}\end{aligned}$$

se réduit à $\{p'\}$ aus voisinage de p'. Puisque $\psi(0) \neq 0$ et $\psi_{z_2'^k}(0) \neq 0$, on peut supposer, après dilatation, que $\psi(0) = 1$ et $\psi_{z_2'^k}(0) = 1$. En prenant $\beta_1 = \beta_2 = 0$, on voit qu'une équation de $\Upsilon_{p'}$ se réduit à

$$z_1'^{\mu} = z_{1p'}'^{\mu}, \text{ donc } z_1' = z_{1p'}'.$$

Par conséquent, toutes les équations restantes sont

$$z_{1p'}'^{\mu}\psi_{\beta_1\beta_2}(z_{1p'}', z_2') = z_{1p'}'^{\mu}\psi_{\beta_1\beta_2}(z_{1p'}', z_{2p'}').$$

Si $z_{1p'}' = 0$, elles sont automatiquement satisfaites, d'où $\{z_1' = 0, t' = 0\} \subset \Sigma'$. Si $z_{1p'}' \neq 0$, elles impliquent $z_2' = z_{2p'}'$. Pour le voir, on prend $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = k$, on divise par $z_{1p'}'^{\mu}$ et on trouve $z_2'^k = z_{2p'}'^k$, d'où la proposition.

LEMME 3.2 *Soit N une hypersurface analytique réelle donnée dans des coordonnées normales en* 0 (z_1, z_2, w), *telle que $T_0N = \{t = 0\}$. Supposons que Σ, l'ensemble des points non essentiellement finis de N, soit donné par $\Sigma = \{z_1 = 0,\ t = 0\}$. Alors l'équation de N est donnée par*

$$t = z_1\bar{z}_1\tilde{\varphi}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, s). \tag{3.3}$$

Démonstration On rappelle qu'un ensemble analytique complexe de dimension $n-1$ contenu dans une hypersurface réelle de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ est nécessairement lisse (cf. Proposition 3.1 dans [8]).

Comme Υ_p est un ensemble analytique complexe de dimension 1 et que $\Upsilon_p \subset \Sigma$ pour tout $p \in \Sigma$ et que $\dim \Sigma = 3$, on en déduit que si p a les coordonnées $(0, z_{2p}, s_p)$,

$$\Upsilon_p = \{(0, z_2, s_p);\ z_2 \text{ proche de } z_{2p}\}.$$

Soit

$$t = \varphi_0(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, s), \tag{3.4}$$

une équation de N, et

$$\bar{w} = w + iG(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, w), \tag{3.5}$$

l'équation transformée de (3.4) en la résolvant par rapport à $\bar{w}$ au moyen du théorème des fonctions implicites. D'après [2] et [4], si on développe la fonction analytique G par rapport aux puissances de $\bar{z}$,

$$G(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, w) = \sum_{\beta_1, \beta_2 \geq 0} \bar{z}_1^{\beta_1} \bar{z}_2^{\beta_2} G_{\beta_1 \beta_2}(z_1, z_2, w),$$

et comme les coordonnées sont normales, $G(0, 0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, w) \equiv G(z_1, z_2, 0, 0, w) \equiv 0$, on a:

$$\begin{aligned} \Upsilon_p = \{ & (z_1, z_2, w);\ (z_1, z_2, w) \text{ proche de } (z_{1p}, z_{2p}, w_p) \\ & G_{\beta_1 \beta_2}(z_1, z_2, w) = G_{\beta_1 \beta_2}(z_{1p}, z_{2p}, w_p),\ \forall (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2 \}. \end{aligned}$$

Pour $\beta_1 = \beta_2 = 0$, on obtient $w = w_p$. M contient $\{z_1 = 0, t = 0\}$ si et seulement si $G_{0\beta_2}(0, z_2, w) \equiv 0\ \forall \beta_2 \in \mathbb{N}$. Il existe donc une fonction holomorphe $\tilde{G}_{0\beta_2}$ telle que $G_{0\beta_2}(z_1, z_2, w) \equiv z_1 \tilde{G}_{0\beta_2}(z_1, z_2, w)$. Comme $\Sigma = \{z_{1p} = 0, t_p = 0\}$, les équations de Υ_p impliquent $z_1 = 0$ si $z_{1p} = 0$. Elles se réduisent alors, si $z_{2p} = 0$ et $w_p = s_p$, à

$$G_{\beta_1 \beta_2}(0, z_2, s_p) = G_{\beta_1 \beta_2}(0, 0, s_p), \quad \forall (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2,$$

et, par hypothèse, on doit avoir $G_{\beta_1 \beta_2}(0, z_2, s_p) \equiv G_{\beta_1 \beta_2}(0, 0, s_p)$, $\forall (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$. Or $G_{\beta_1 \beta_2}(0, 0, w) \equiv 0$, puisque les coordonnées sont normales. Donc

$$G_{\beta_1 \beta_2}(z_1, z_2, w) \equiv z_1 \tilde{G}_{\beta_1 \beta_2}(z_{1p}, z_2, w), \quad (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2.$$

Enfin, $G(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, w) \equiv z_1 \tilde{G}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, w)$. En conjuguant l'équation (3.5), on obtient que G est aussi multiple de $\bar{z}_1$, donc (3.3) est réalisée.

LEMME 3.6 *Si le lieu non essentiellement fini de M, avec $T_0 M = \{t = 0\}$, est donné par $\Sigma = \{z_1 = 0, t = 0\}$, il existe un changement holomorphe normal de coordonnées qui stabilise Σ.*

Démonstration Comme M contient $\{z_1 = 0, t = 0\}$, il existe deux fonctions analytiques θ_1 et θ_2 telles que l'équation de M soit donnée par

$$t = z_1 \theta_1(z, \bar{z}, s) + \bar{z}_1 \theta_2(z, \bar{z}, s). \tag{3.7}$$

En suivant [2], soit $R=R(z,w)$ l'unique solution holomorphe telle que

$$R+\mathrm{i}z_1\theta_1(z,0,R)=w, \quad R(0)=0. \tag{3.8}$$

Alors, en prenant pour nouvelles variables $(Z_1,Z_2)=(z_1,z_2)$, $W=F(z_1,z_2,w)$, on normalise les coordonnées (cf. Lemme 1.1 dans [2]) en posant

$$F(z_1,z_2,w)=\bar{R}(0,R(z,w)-\mathrm{i}z_1\theta_1(z,0,R(z,w))). \tag{3.9}$$

Utilisant (3.7), (3.8), (3.9), on obtient que F s'écrit

$$F(z_1,z_2,w)=w+z_1\tilde{F}(z_1,z_2,w).$$

Les biholomorphismes de la forme

$$(z_1,z_2,w)\to(z_1,z_2,w+z_1A(z_1,z_2,w))$$

stabilisent Σ.

PROPOSITION 3.10 *Soit $H:M\to M'$ comme ci-dessus. Il existe alors un changement holomorphe normal de coordonnées dans la source tel que $T_0M=\{t=0\}$ tel que Σ, l'ensemble des points non essentiellement finis de M, soit donné par*

$$\Sigma=\{z_1=0,\ t=0\}, \tag{3.11}$$

et M soit donnée par (3.3).

Démonstration D'après les Théorèmes 1 et 3 de [3], H échange les points essentiellement finis de M avec ceux de M', d'où $\Sigma=H^{-1}(\Sigma')$. Puisque Σ' est feuilletée par des droites complexes et que H établit un difféomorphisme CR $H_{|\Sigma}:\Sigma\to\Sigma'$, Σ est une variété CR de dimension CR égale à 1, Levi plate, de dimension réelle 3. D'après [4], Σ est analytique rélle. Il existe alors un changement holomorphe local de coordonnées tel que son germe en 0 soit donné par les équations

$$z_1=G(z_2,\bar{z}_2,s), \quad t=k(z_2,\bar{z}_2,s),$$

avec des fonctions G et k analytiques réelles satisfaisant à la condition $G(z_2,0,s)\equiv G(0,\bar{z}_2,s)\equiv 0$, $k(z_2,0,s)\equiv k(0,\bar{z}_2,s)\equiv 0$. Comme Σ est

Levi plate, G et k sont indépendantes des variables z_2, $\bar{z}_2$ et les équations de Σ se réduisent à $z_1 = G(s)$, $t = k(s)$. Il est alors clair que si on effectue le changement de variables

$$z_1 = \tilde{z}_1 + G(\tilde{w}), \quad w = \tilde{w} + ik(\tilde{w}),$$

on obtient (3.11). Les Lemmes 3.2 et 3.6 permettent alors de conclure.

Sans limiter la généralité, on pourra donc supposer dès maintenant que M est de la forme (3.3). De plus, décidons que le côté où $H = (H_1, H_2, H_3)$ se prolonge est le côté situé au-dessus de M (puisque M est de type fini [7,10]).

DÉFINITION 3.12 *On dit qu'une fonction $u(z, \bar{z}, s)$ se prolonge "en bas" [resp. "en haut"] si $s \to u(z, \bar{z}, s)$ est la valeur au bord de la fonction holomorphe*

$$s + it \to u(z, \bar{z}, s + it), \quad t < 0 \; [\textit{resp. } t > 0] \; \textit{petit},$$

de telle manière que $u(z, \bar{z}, s + it)$ soit une fonction de classe C^∞ de toutes ses variables, pour $|z| < \varepsilon, |s| < \varepsilon$, $-\varepsilon < t \leq 0$ [resp. $0 \leq t < \varepsilon$], ε assez petit.

Au-dessus de M, on peut écrire

$$H(z, s + it + i\varphi(z, \bar{z})) = (f_1, f_2, g)(z, \bar{z}, s + it), \quad t \geq 0. \qquad (3.13)$$

PROPOSITION 3.14 *Soit $H : M \to M'$ comme ci-dessus. Alors la composante H_1 s'écrit sur M et au-dessus de M*

$$H_1(z, w) = z_1 \tilde{H}_1(z, w), \qquad (3.15)$$

où $\tilde{H}_1(z, w)$ est de classe C^∞ sur M, holomorphe au-dessus de M.

Démonstration $H(\Sigma) = \Sigma$ implique que $f_1(0, z_2, s) \equiv 0$, $\forall z_2 \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{R}$ $|z_2|$, $|s|$ petits. Ceci entraîne que $f_1(0, z_2, s + it) \equiv 0$, $t \geq 0$. En utilisant (3.3) et le dévelopement de Taylor de H_1 autour d'un point $(0, z_2, w)$ situé sur M ou au-dessus de M, on obtient alors

$$H_1(z_1, z_2, w) = z_1 k(z_1, z_2, w) + \bar{z}_1 h(z_1, z_2, w).$$

Comme, par hypothèse, $(\partial^{\alpha+\beta}/(\partial z_1^\alpha \partial \bar{z}_1^\beta))H(0, z_2, w) \equiv 0$, $\beta \geq 1$, on en déduit que H_1 est en fait de la forme (3.15).

4. ETUDE DE LA COMPOSANTE TRANSVERSE

Dans ce paragraphe, on suppose que $H: M \mapsto M'$ est un difféomorphisme local CR en 0, de classe C^∞, avec $H(0) = 0$. On suppose que M' est donnée par (0.1) et que M est donnée par (3.3). On écrit (F_1, F_2, G) les séries de Taylor holomorphes formelles de H en 0. On a alors le lemme suivant.

LEMME 4.1 *Soit $H: M \to M'$ comme ci-dessus. Alors M est de la forme*

$$t = z_1^\mu \bar{z}_1^\mu \phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, s). \tag{4.2}$$

Démonstration Comme M est en coordonnées normales, $G(z, w) = wG^1(z, w)$, avec $G^1(0) \neq 0$ [3]. Puisque $H(M) \subset M'$, on a

$$\begin{aligned}
&(s + \mathrm{i}z_1\bar{z}_1\tilde{\varphi}(z, \bar{z}, s))G^1(z, s + \mathrm{i}z_1\bar{z}_1\tilde{\varphi}(z, \bar{z}, s)) \\
&\quad - (s - \mathrm{i}z_1\bar{z}_1\tilde{\varphi}(z, \bar{z}, s))\bar{G}^1(\bar{z}, s - \mathrm{i}z_1\bar{z}_1\tilde{\varphi}(z, \bar{z}, s)) \\
&\quad\quad \equiv F_1^\mu(z, s + \mathrm{i}z_1\bar{z}_1\tilde{\varphi}(z, \bar{z}, s))\bar{F}_1^\mu(\bar{z}, s - \mathrm{i}z_1\bar{z}_1\tilde{\varphi}(z, \bar{z}, s)) \\
&\quad\quad \psi\left(F_1(), F_2(), \bar{F}_1(), \bar{F}_2(), \frac{G() + \bar{G}()}{2}\right).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

En réordonnant les termes, on peut écrire (4.3)

$$\begin{aligned}
&sG^1(z, s) - s\bar{G}^1(\bar{z}, s) + z_1\bar{z}_1\tilde{\varphi}()[G^1 + \bar{G}^1 + \alpha(z, \bar{z}, s)] \\
&\quad \equiv F_1^\mu \bar{F}_1^\mu \psi\left(F_1, F_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \frac{G + \bar{G}}{2}\right),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

avec $\alpha(0) = 0$. Utilisant la Proposition 3.14 (qui implique que F_1 est factorisable par z_1), et le fait que $G^1(0)$ est un nombre réel non nul, l'expression (4.4) nous donne que M est de la forme (4.2) en identifiant les séries formelles.

Soit L_j, $j = 1, 2$, les champs de vecteurs anti-holomorphes tangents à M donnés par 2.2. Il est alors clair que si M est donnée par (4.2),

$$\begin{cases}
L_1 = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \mathrm{i}\bar{z}_1^{\mu-1} z_1^\mu A_1(z, \bar{z}, s)\dfrac{\partial}{\partial s}, \\
L_2 = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - \mathrm{i}z_1^\mu \bar{z}_1^\mu A_2(z, \bar{z}, s)\dfrac{\partial}{\partial s}.
\end{cases} \tag{4.5}$$

PROPOSITION 4.6 *Soit $H : M \to M'$ comme ci-dessus. Alors la fonction $H_3(0, z_2, w)$ définie sur M et au-dessus de M, se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de 0 qui, de plus, est indépendante de z_2.*

Démonstration Comme $H(M) \subset M'$, on obtient

$$\frac{g-\bar{g}}{2i} = f_1^\mu \bar{f}_1^\mu \psi(f_1, \bar{f}_1, f_2, \bar{f}_2). \tag{4.7}$$

Ceci implique, en utilisant (3.11), que

$$g(0, z_2, \bar{z}_2, s) - \overline{g(0, z_2, \bar{z}_2, s)} \equiv 0 \quad \forall z_2 \in \mathbb{C}, \;\; s \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

D'autre part, utilisant l'hypothèse et (3.13), on déduit que $g(0, z_2, \bar{z}_2, s)$ est holomorphe par rapport à la variable z_2 et donc, utilisant (4.8), indépendante de la variable z_2. Le principe de symétrie de Schwarz à une variable complexe nous enseigne, utilisant (4.8) et la remarque ci-dessus que $g(0, z_2, s + it)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$ indépendante de z_2.

Comme $H_3(0, z_2, w)$ se prolonge holomorphiquement après un changement de coordonnées, on se ramène à

$$H_3(0, z_2, w) = w. \tag{4.9}$$

On vérifie que M et M' sont toujours données en coordonnées normales.

PROPOSITION 4.10 *Soit $H : M \to M'$ comme ci-dessus. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $\tilde{H}_k$ de classe C^∞ sur M, se prolongeant holomorphiquement au-dessus de M telle que H_3 s'écrive sur M et au-dessus de M*

$$H_3(z_1, z_2, w) = w + z_1^k \tilde{H}_k(z_1, z_2, w). \tag{4.11}$$

Démonstration On utilise le dévelopement de Taylor de H_3 autour d'un point $(0, z_2, w)$ situé sur M ou au-dessus de M; on obtient alors, exploitant (4.9) et l'hypothèse de prolongement au-dessus de M (on utilise le même argument que dans la démonstration de la

Proposition 3.14) que

$$H_3(z_1, z_2, w) = w + z_1 \tilde{H}_1(z_1, z_2, w),$$
$$(z_1, z_2, w) \text{ sur } M \text{ et au-dessus de } M, \tag{4.12}$$

où $\tilde{H}_1$ est de classe C^∞ sur M et se prolonge holomorphiquement au-dessus de M. Dérivant l'expression (4.7) par rapport à la variable z_1, et la prenant au point $(0, z_1, s)$, on obtient, utilisant la forme de M donnée par (4.2) et la Propsition 3.14, que $(\partial^k/\partial z_1^k)H_3(0, z_2, s) \equiv 0$, $k \geq 1$. On en déduit alors, d'après le principe du prolongement analytique, que

$$\frac{\partial^k}{\partial z_1^k} H_3(0, z_2, w) \equiv 0, \quad k \geq 1. \tag{4.13}$$

En combinant (4.12) avec (4.13) on obtient alors (4.11).

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.14 *H_3 se prolonge holomorphiquement dans un voisinage de* 0, *et on a*

$$H_3(z, w) \equiv w.$$

5. PREUVE DU THÉORÈME

Soit $H: M \to M'$ un difféomorphisme local CR de classe C^∞, avec $H(0) = 0$ et M' donnée par (0.1). On note k_2 le plus petit entier tel que $\psi_{z_2^k}(0) \neq 0$.

Comme dans [2], au lieu de considérer les champs de vecteurs L_j donnés par (4.5), on considère les champs $D_j = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} L_k$, $j = 1, 2$, où (a_{jk}) est la matrice inverse dela matrice $(L_j \bar{f}_k)$. On obtient alors

$$D_j \bar{f}_k = \delta_{jk}, \quad j = 1, 2. \tag{5.1}$$

Utilisant la Proposition 3.14, on remarque que le coefficient du terme $(\partial/\partial s)$ de D_j est de la même forme que celui de L_j (cf. (4.5)).

LEMME 5.2 *Soit $H: M \to M'$ comme ci-dessus. Alors on a les propriétés suivantes*

$$D_1^{\mu} D_2^{k_2} \bar{g}(z, \bar{z}, s) = (f_1^{\mu} A(f_1) + B(f_1, \bar{f}_1, \bar{f}_2))(z, \bar{z}, s) \tag{5.3}$$

où A et B sont holomorphes dans un voisinage de 0, avec $A(0) \neq 0$ et $B(Z_1, 0, 0) \equiv 0$,

$$D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \bar{g}(z, \bar{z}, s + \mathrm{i}t) = z_1^{\mu} U(z, \bar{z}, s + \mathrm{i}t), \quad t \geq 0, \tag{5.4}$$

où $U(z, \bar{z}, s + \mathrm{i}t)$ est une fonction de classe C^{∞}, holomorphe par rapport à la variable $s + \mathrm{i}t$, $t > 0$.

Démonstration En appliquant $D_2^{k_2}$ à (4.7), on obtient

$$D_2^{k_2} \bar{g} = f_1^{\mu} \bar{f}_1^{\mu} C(f_1, \bar{f}_1) + \sum_{\ell \geq 1} \bar{f}_2^{\ell} C_{\ell}(f_1, \bar{f}_1). \tag{5.5}$$

En appliquant D_1^{μ} à (5.5), on obtient finalement (5.3). Pour obtenir (5.4), il suffit d'observer la forme des champs de vecteurs D_j, $j = 1, 2$ et d'appliquer la Proposition 4.10.

PROPOSITION 5.6 *Soit $H: M \to M'$ comme ci-dessus. Alors la composante $f_1(z, \bar{z}, s)$ satisfait l'équation polynomiale suivante:*

$$f_1^{\mu} + \sum_{j=1}^{\mu} a_j(\bar{f}_1, \bar{f}_2, D_1^{\mu} D_2^{k_2} \bar{g}) f_1^{\mu - j} = 0, \tag{5.7}$$

où a_j, $1 \leq j \leq \mu$, sont des fonctions holomorphes en 0 dans $\mathbb{C}^3$ satisfaisant les propriétés suivantes:

$$a_j(z_1, z_2, 0) \equiv 0 \quad 1 \leq j \leq \mu \tag{5.8}$$

$$a_j(\bar{f}_1, \bar{f}_2, D_1^{\mu} D_2^{k_2} \bar{g})(z, \bar{z}, s) = z_1^{\mu} A_j(z, \bar{z}, s), \tag{5.9}$$

où A_j, $1 \leq j \leq \mu$, sont des fonctions se prolongeant "en bas" au sens de la définition 3.12.

Démonstration L'expression (5.7) s'obtient en appliquant le théorème de Préparation de Weierstrass à l'expression (5.3), en tenant compte du fait que $A(0) \neq 0$ et $B(f_1, 0, 0) \equiv 0$. L'expression (5.8) s'obtient en étudiant la forme particulière de (5.3) et en utilisant l'unicité de la décomposition donnée par le Théorème de Weierstrass. L'expression (5.9) découle de (5.8), (5.4) et du fait que $\bar{f}_1$ et $\bar{f}_2$ se prolongent "en bas" au sens de la définition 3.12.

On peut écrire (4.7) sous la forme suivante:

$$g - \bar{g} = f_1^{\mu}\bar{f}_1^{\mu}\left(1 + f_2^{k_2} + \bar{f}_2^{k_2} + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_2^k C_k(f_1, \bar{f}_1)\right)\right) \tag{5.10}$$

avec C_k holomorphe en 0 dans $\mathbb{C}^2$ et vérifiant $C_k(0) = 0$, $0 \leq k \leq k_2$.

LEMME 5.11 *Soit $H: M \to M'$ comme ci-dessus. Alors la composante $f_2(z, \bar{z}, s)$ satisfait l'équation analytique suivante*

$$a_{\mu}^{\mu} f_2^{k_2\mu} + \sum_{k=0}^{\infty} f_2^k B_k(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \{a_j\}_{1 \leq j \leq \mu}, D_1^{\mu}\bar{g}) = 0 \tag{5.12}$$

où B_k, $k \in \mathbb{N}$, sont des fonctions holomorphes en 0 *dans $\mathbb{C}^{\mu+3}$ satisfaisant les propriétés suivantes*:

$$B_k = \sum_{\ell_1 + \cdots + \ell_{\mu} + m = \mu} a_1^{\ell_1} \cdots a_{\mu}^{\ell_{\mu}} (D_1\bar{g})^m \tilde{B}_{k\ell_1 \cdots \ell_{\mu} m}, \tag{5.13}$$

$$B_k(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \{a_j\}_{1 \leq j \leq \mu}, D_1^{\mu}\bar{g})(z, \bar{z}, s) = z_1^{\mu}\widehat{B_k}(z, \bar{z}, s), \tag{5.14}$$

$$\widehat{B_k}(0) = 0, \quad 0 \leq k \leq k_2. \tag{5.15}$$

Démonstration En appliquant D_1^{μ} à (5.10), on obtient une expression de la forme

$$-D_1^{\mu}\bar{g} = f_1^{\mu} + f_1^{\mu} f_2^{k_2} + f_1^{\mu}\bar{f}_2^{k_2} + f_1^{\mu}\left[2\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty} f_2^k D_k(f_1, \bar{f}_1)\right], \tag{5.16}$$

avec $D_k(0, 0) = 0$, $0 \leq k \leq k_2$.

Soit maintenant $\rho_1, \ldots, \rho_\mu$ les racines du polynôme donné en (5.7) (f_1 est l'une d'entre elles). On forme alors le produit successif des équations (5.16) après remplacement de f_1 par ρ_j

$$\prod_{\ell=1}^{\mu}\left(\rho_\ell^\mu f_2^{k_2} + \rho_\ell^\mu\left[\sum_{k=0}^{\infty}(f_2^k D_k(\rho_\ell, \bar{f}_1) + \bar{f}_2^k \bar{D}_k(\bar{f}_1, \rho_\ell))\right]\right.$$
$$\left. + \rho_\ell^\mu(1 + \bar{f}_2^{k_2}) + D_1^\mu \bar{g}\right) = 0. \tag{5.17}$$

Comme (5.17) est une fonction symétrique des racines ρ_j, on en déduit, en utilisant le théorème de Newton, que (5.17), une fois développée, s'écrit comme (5.12). L'expression (5.13) découle de (5.17). D'après (5.9), (5.14) est une conséquence de (5.13). Enfin (5.15) vient de ce que $D_k(0) = 0$, $0 \leq k \leq k_2$.

On obtient alors:

PROPOSITION 5.18 *Soit $H: M \to M'$ comme ci-dessus. Alors la composante $f_2(z, \bar{z}, s)$ satisfait l'équation polynomiale suivante*

$$f_2^{k_2\mu} + \sum_{j=1}^{k_2\mu} b_j(u) f_2^{k_2\mu - j} = 0, \tag{5.19}$$

où b_j, $1 \leq j \leq k_2\mu$, sont des fonctions dépendant d'un ensemble de fonctions u se prolongeant "en bas" en 0, telles que $b_j(0) = 0$ et que $b_j(u)$ se prolongent "en bas" en 0.

Démonstration Grâce à (5.14), toutes les fonctions $B_k(z, \bar{z}, s)$ sont divisibles par $a_\mu^\mu(z, \bar{z}, s) = 1 + o(1)$. Par conséquent, (5.19) découle de (5.11) après division par a_μ^μ et application du théorème de Préparation de Weierstrass.

L'équation de M' donnée par (0.1) s'écrit

$$\bar{w}' = w' - 2i z_1'^{\mu} \bar{z}'_\mu \psi(z_1', \bar{z}_1', z_2', \bar{z}_2') = Q(z', \bar{z}', w'). \tag{5.20}$$

On a alors le lemme suivant

LEMME 5.21 *Soit $H: M \to M'$ comme ci-dessus, avec M' donnée par (5.20). Alors*

$$Q_{\zeta^\alpha}(f_1, f_2, \bar{f}_1, \bar{f}_2, g) = D^\alpha \bar{g}, \tag{5.22}$$

où $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$.

Démonstration Par hypothèse,

$$\bar{g} = g - 2\mathrm{i} f_1^\mu \bar{f}_1^\mu \psi(f_1, \bar{f}_1, f_2, \bar{f}_2) = Q(f_1, f_2, \bar{f}_1, \bar{f}_2, g). \tag{5.23}$$

En appliquant $D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}$ à l'expression (5.23), on obtient (5.22).

Preuve du Théorème Utilisant la Proposition 5.6, la Proposition 5.18 et le Lemme 7.1 de [3], nous obtenons que pour α, $Q_{\varsigma^\alpha}(f_1, f_2, \bar{f}_1, \bar{f}_2, g)$ satisfait une équation polynomiale avec des coefficients qui sont des fonctions analytiques dépendant de fonctions se prolongeant "en bas". On pose $f = (f_1, f_2)$. Utilisant le Lemme 5.21 et le Lemme 8.15 dans [0], on obtient que pour chaque α,

$$|Q_{\varsigma^\alpha}(f, \bar{f}, g)(z, \bar{z}, s + \mathrm{i}t)| \leq C^{|\alpha|+1} \alpha!$$

Nous pouvons alors conclure, lisant la preuve du Théorème 1 de [3], que

$$Q(f, \lambda, g)(z, \bar{z}, s) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \bar{f})^\alpha}{\alpha!} Q_{\varsigma^\alpha}(f, \bar{f}, g)(z, \bar{z}, s)$$

se prolonge "en bas" et "en haut", uniformément pour des petites valeurs de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. En choisissant $\lambda = 0$, nous obtenons que g se prolonge "en bas" puisque nous travaillons en coordonnées normales. Comme g est une fonction holomorphe CR, ceci implique que H_3 est la restriction d'une fonction holomorphe dans un voisinage de 0 de $\mathbb{C}^3$. En effet, il suffit d'appliquer une variante du Corollaire 2.1 et du Lemme 2.2 dans [2]. On rappelle que le prolongement holomorphe de H_3 a été obtenu auparavant (Corollaire 4.14). On pose $Q(f, \lambda, g)(x, y, s) = F(\lambda, x, y, s)$. Comme $Q(f, \lambda, g)$ est une fonction CR, $F(\lambda, x, y, s)$ est analytique réelle en les variables x, y, s, pour les mêmes-raisons que ci-dessus. Utilisant (5.23), on obtient,

$$g(x, y, s) + R(f, \lambda)(x, y, s) + S(f, \lambda, g)(x, y, s) - F(\lambda, x, y, s) \equiv 0. \tag{5.24}$$

Dérivant (5.24) μ fois par rapport à λ_1 et k_2 fois par rapport à λ_2, on obtient, utilisant à nouveau le Théorème de préparation de

Weierstrass, une équation polynomiale pour f_1 avec des coefficients analytiques réels. Utilisant la même démarche que dans la Proposition 5.18, on obtient également, en dérivant (5.24) μ fois par rapport à la variable λ_2, une équation polynomiale pour f_2 avec des coefficients analytiques réels. On conclut alors, utilisant le Lemme 6.1 dans [2], que H_1 et H_2 sont des restictions de fonctions holomorphes d'un voisinage de 0 de $\mathbb{C}^3$.

Références

[0] M.S. Baouendi, S. Bell and L.P. Rothschild, *Mappings of three-dimensional CR manifolds and their holomorphic extension, Duke Math. J.*, **56** (1988), 503–530.

[1] M.S. Baouendi, X. Huang and L.P. Rothschild, *Regularity of CR mappings between algebraic hypersurfaces, Invent. Math.* **125** (1996),13–36.

[2] M.S. Baouendi, H. Jacobowitz and F. Treves, *On the analyticity of CR mappings, Ann. of Math.* **122** (1985), 365–400.

[3] M.S. Baouendi and L.P. Rothschild, *Germs of CR maps between real analytic hypersurfaces, Invent. Math.* **93** (1988), 481–500.

[4] M.S. Baouendi and L.P. Rothschild, *Geometric properties of smooth and holomorphic mappings between hypersurfaces in complex space, J. Diff. Geom.* **31** (1990), 473–499.

[5] M.S. Baouendi and L.P. Rothschild, *A general reflection principle in* $\mathbb{C}^2$, *J. Funct. Anal.* **99** (1991), 409–442.

[6] M.S. Baouendi and L.P. Rothschild, *Mappings of real algebraic hypersurfaces, J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), 997–1015.

[7] T. Bloom and I. Graham, *On type conditions for generic submanifolds of* $\mathbb{C}^n$, *Invent.-Math.* **40** (1977), 217–243.

[8] S. Pinchuk, *CR-Transformations of real manifolds in* $\mathbb{C}^n$, *Indiana Univ. Math. J.* **41** (1992), 1–16.

[9] N. Stanton, Infinitesimal CR automorphisms of rigid hypersurfaces of the space of n complex variables, *Amer. Math. J.* **117** (1995), 141–147.

[10] J.M. Trepreau, Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe C^2dans $\mathbb{C}^n$, *Invent. Math.* **83** (1986), 583–592.